

УДК 517.518

DOI <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2026.1.2/04>**Барабаш О.В.**<https://orcid.org/0000-0003-1715-0761>

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Макарчук А.В.<https://orcid.org/0000-0002-6422-7488>

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Кухарук С.О.<https://orcid.org/0009-0005-0550-1466>

Волинський національний університет імені Лесі Українки

АПРОКСИМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ АНАЛОГІВ ОПЕРАТОРІВ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ЯК МЕТОДУ НАБЛИЖЕННЯ ОДНОВИМІРНИХ ЦИФРОВИХ СИГНАЛІВ

В роботі досліджуються апроксимаційні властивості інтерполяційних аналогів операторів Валле-Пуссена як узагальнення інтерполяційних аналогів операторів Фейєра в контексті задачі наближення функцій однієї дійсної змінної на скінченному проміжку. Розглянуто представлення сум Валле-Пуссена у вигляді інтегрального оператора та на цій основі побудовано відповідні інтерполяційні аналоги, придатні для наближення табульованих сигналів. Отримано явний вигляд даних операторів та проаналізовано залежність якості наближення від параметрів методу, зокрема від значення параметра узагальнення та кількості вузлів інтерполяції. Для оцінки ефективності запропонованого підходу проведено чисельні експерименти на конкретних тестових функціях, а також виконано імітаційне моделювання для класів сигналів з наперед заданими властивостями гладкості. Як міру якості наближення використано середньоквадратичне відхилення між вихідною функцією та її наближенням. Отримані результати свідчать, що мінімальне значення похибки досягається у випадку, коли інтерполяційні аналоги операторів Валле-Пуссена переходять в інтерполяційні аналоги операторів Фейєра, які є їх частинним випадком. Показано, що узагальнення інтерполяційних аналогів операторів Фейєра до операторів типу Валле-Пуссена не завжди є виправданим з точки зору практичних задач наближення, оскільки може призводити до погіршення точності незалежно від кількості вузлів інтерполяції. Отримані результати підтверджують високу ефективність інтерполяційних аналогів операторів Фейєра та вказують на доцільність подальших досліджень методів наближення, основаних на підсумовуванні рядів Фур'є, для прикладних задач обробки сигналів, економіки та суміжних галузей

Ключові слова: обробка цифрових сигналів, наближення, оператори Валле-Пуссена, оператори Фейєра, аналіз Фур'є, інтерполяція, апроксимаційні властивості.

Постановка проблеми. Використання операторів, породжених лінійними методами підсумовування рядів Фур'є, та їх інтерполяційних аналогів як метод наближення знаходить широке застосування в різних напрямках техніки [1, 2], економіки [3, 4]. Це спонукає до активного дослідження їх апроксимаційних властивостей та можливостей застосування.

Деякі з таких операторів знайшли широке застосування в таких напрямках, як цифрова обробка сигналів. До них, зокрема, відносяться оператор Діріхле

$$D_n(f, x) = \int_0^T f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} dt \quad (1)$$

та оператори Фейєра

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \int_0^T f(t) \frac{1 - \cos \frac{2\pi(n+1)(t-x)}{T}}{1 - \cos \frac{2\pi(t-x)}{T}} dt. \quad (2)$$

не менший інтерес в таких напрямках викликають й інтерполяційні аналоги операторів (1) та (2), що



стало стимулом до їх дослідження в ряді робіт [1, 5, 6]. Однак на основі цього виникає очікуване питання про розгляд й інших операторів та їх інтерполяційних аналогів у прикладних сферах. Одним з таких операторів, які в перспективі можуть мати практичну цінність, є суми Валле-Пуссена [7]

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^n S_k(f, x), \quad (3)$$

де $S_k(f, x)$ – це частинна сума Фур'є. В даній роботі проводиться аналіз використання даних сум та їх інтерполяційних аналогів, а також потенційна їх застосовність в прикладних задачах наближення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання наближення функцій за допомогою тригонометричних поліномів та операторів, побудованих на основі підсумовування рядів Фур'є, є предметом активних досліджень у теорії наближення. Класичні результати в цій галузі пов'язані з вивченням властивостей операторів Фейєра, які широко застосовуються для згладжування часткових сум рядів Фур'є та забезпечують збіжність у різних функціональних просторах. У роботах [1–3] досліджено фундаментальні властивості операторів типу Фейєра, зокрема їх апроксимаційні характеристики та залежність точності наближення від гладкості апроксимованих функцій.

Подальший розвиток методів підсумовування рядів Фур'є пов'язаний із введенням узагальнених операторів, серед яких важливе місце займають оператори Валле–Пуссена. У працях [4–6] наведено теоретичні результати щодо апроксимаційних властивостей сум Валле–Пуссена, а також показано їх переваги та обмеження порівняно з класичними методами підсумовування. Особливу увагу приділено впливу параметрів операторів на якість наближення та швидкість збіжності.

Окремий напрям досліджень присвячений побудові інтерполяційних аналогів апроксимаційних операторів, що дозволяє застосовувати відповідні методи до наближення табульованих функцій і дискретних сигналів. У роботах [7–9] розглянуто інтерполяційні аналоги операторів Фейєра, досліджено їх властивості та наведено приклади практичного застосування в задачах обробки сигналів. Показано, що такі аналоги зберігають основні апроксимаційні властивості вихідних операторів і водночас є зручними для чисельної реалізації.

Разом із тим питання побудови та дослідження інтерполяційних аналогів узагальнених операторів, зокрема операторів Валле–Пуссена,

залишаються недостатньо вивченими. Зокрема, потребують додаткового аналізу апроксимаційні властивості таких операторів та доцільність їх застосування в порівнянні з інтерполяційними аналогами операторів Фейєра. Саме заповненню цієї прогалини й присвячена дана робота.

Постановка завдання. Метою даної статті є дослідження Апроксимаційні властивості інтерполяційних аналогів операторів Валле-Пуссена та побудова на основі зазначених апроксимаційних аналогів методу наближення одновимірних цифрових сигналів.

Виклад основного матеріалу. Для початку представимо суми Валле-Пуссена (3) у вигляді оператора. Для цього запишемо їх в наступному вигляді:

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^n S_k(f, x) = \frac{1}{p+1} \left(\sum_{k=0}^n S_k(f, x) - \sum_{k=0}^{n-p} S_k(f, x) \right) = \frac{1}{p+1} \left((n+1) \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x) \right) - (n-p+1) \left(\frac{1}{n-p+1} \sum_{k=0}^{n-p} S_k(f, x) \right) \right). \quad (4)$$

Враховуючи те, що оператор Фейєра (2) може бути записаний у вигляді

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x),$$

Із (4) випливає, що

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{p+1} \int_0^T f(t) \frac{\cos \frac{2\pi(n-p+1)(t-x)}{T} - \cos \frac{2\pi(n+1)(t-x)}{T}}{1 - \cos \frac{2\pi(t-x)}{T}} dt \quad (5)$$

Або, що те саме,

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{2}{p+1} \int_0^T f(t) \frac{\sin \frac{\pi(2n-p+2)(t-x)}{T} \sin \frac{\pi p(t-x)}{T}}{1 - \cos \frac{2\pi(t-x)}{T}} dt. \quad (6)$$

Таким чином ми отримали суми (3) у вигляді оператора. Тепер, оскільки суми Валле-Пуссена (3) є узагальненням оператора Фейєра (2), то, діючи аналогічно до результатів, отриманих в [1], ми можемо записати й інтерполяційні аналоги сум (3), які матимуть вигляд

$$\vec{V}_{n,p}(f, x) = \vec{V}_{n,p}(f, m, x) = \frac{2}{(m+1)(p+1)} \sum_{k=0}^m f(x_k) \frac{\sin \frac{\pi(2n-p+2)(x_k-x)}{T} \sin \frac{\pi p(x_k-x)}{T}}{1 - \cos \frac{2\pi(x_k-x)}{T}}. \quad (7)$$

Отриманий інтерполяційний аналог може бути використаний аналогічно до інтерполяційних аналогів операторів Фейєра [1, 5], а саме в наближенні функцій, табульованих на проміжку $[0; T]$. Для демонстрації цього, побудуємо наближення функції

$$f(x) = \Gamma(e^{\sin x} + 1) \cos 2x - \Gamma(e^{\cos 2x} + 1) \sin 3x$$

на проміжку $[0; 2\pi]$ за допомогою (7) з припущенням, що всі вузли інтерполяції, тобто точки $(x_k, f(x_k))$, $k=0, 1, 2, \dots, m$, є рівновіддаленими. Для оцінки якості наближення побудуємо значення величини

$$\varepsilon = \varepsilon(p, m) = \int_0^{2\pi} (f(t) - \tilde{V}_{n,p}(f, t))^2 dt \quad (8)$$

для випадків $n=10$ (рис. 1), $n=15$ (рис. 2) та $n=25$ (рис. 3).

На рис. 1-3 добре видно, що при використанні інтерполяційних аналогів оператора Валле-Пуссена (7) найменше середньоквадратичне наближення функції $f(x)$ на проміжку $[0; 2\pi]$ слід очікувати у випадку $p=n$. Даний випадок відповідає випадку, коли (7) перетворюється в інтерполяційний аналог оператора Фейєра (2). Це означає, що іноді перехід від інтерполяційних аналогів операторів Фейєра до їх узагальнень типу інтерполяційних аналогів Валле-Пуссена може виявитися невиправданим із-за можливості погіршення якості наближення.

Для того, щоб переконатися в отриманому результаті, розглянемо аналогічну ситуацію, але візьмемо тепер функцію

$$f(x) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} e^{\sin\left(kx + \frac{\pi}{2k}\right)} \cos\left(kx - \frac{\pi}{2k}\right).$$

За аналогією з попереднім прикладом побудуємо графіки величини (8) для випадків $n=10$, $n=15$ та $n=25$ (рис. 4, 5, 6).

Якщо ми будемо порівнювати рис. 1 з рис. 4, рис. 2 – з рис. 5, а рис. 3 – з рис. 6, ми побачимо

аналогічну ситуацію, перехід від інтерполяційних аналогів оператора Фейєра до інтерполяційних аналогів оператора Валле-Пуссена не є виправданим із-за того, що інтерполяційні аналоги оператора Фейєра як частинний випадок є найоптимальнішими з точки зору мінімізації (8). Таким чином ми отримуємо, що окремі розгляд операторів (4) та їх інтерполяційних аналогів є недоцільним з точки зору практичних задач.

Для того, щоб переконатися в тому, що описані результати не є артефактами сигналів, що описані виключно вказаними функціями, а можуть бути узагальнені на цілі класи сигналів, можна провести імітаційне моделювання. Так, для прикладу, розглянемо клас сигналів, що описується функціями $f(t)$ з класу $H^\alpha([0; 2\pi])$ тобто такими, що

$$\forall t_1, t_2 \in [0; 2\pi]: |f(t_1) - f(t_2)| \leq |t_1 - t_2|^\alpha$$

для наперед заданого $\alpha \in (0, 1]$. Для підтвердження того, що описані вище результати можуть бути перенесені й на даний клас сигналів виберемо випадковим чином три тисячі сигналів, перша тисяча з яких описується функціями $f(t) \in H^{\frac{1}{3}}([0; 2\pi])$, друга – функціями $f(t) \in H^{\frac{2}{3}}([0; 2\pi])$, третя – функціями $f(t) \in H^1([0; 2\pi])$, та знайдемо для них середнє значення величини (8) при різних значеннях параметрів n і p та кількості відліків сигналу m .

Аналізуючи таблицю 1, стає очевидним, що інтерполяційні аналоги операторів Фейєра є най-

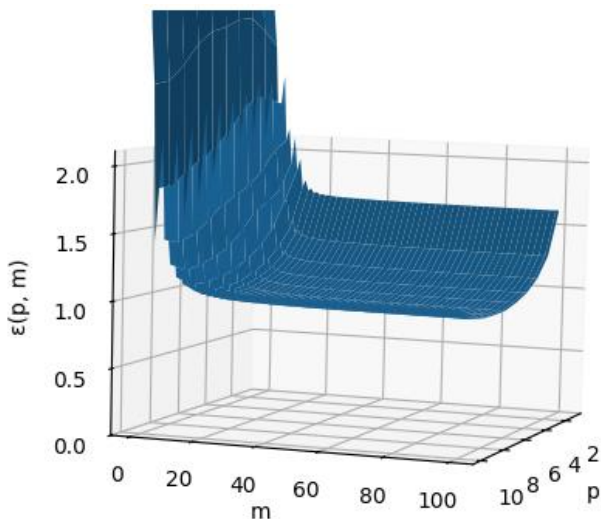


Рис. 1. Значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon = \varepsilon(p, m)$ при наближенні функції $f(x)$ інтерполяційними аналогами Валле-Пуссена (7) залежно від значення параметра p та кількості вузлів інтерполяції m у випадку $n=10$

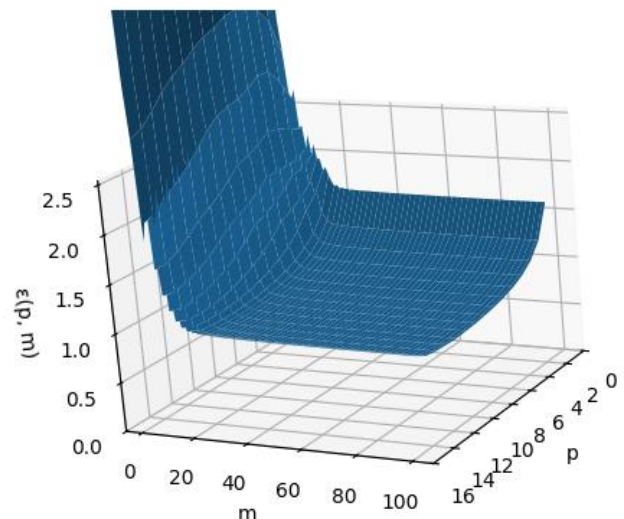


Рис. 2. Значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon = \varepsilon(p, m)$ при наближенні функції $f(x)$ інтерполяційними аналогами Валле-Пуссена (7) залежно від значення параметра p та кількості вузлів інтерполяції m у випадку $n=15$

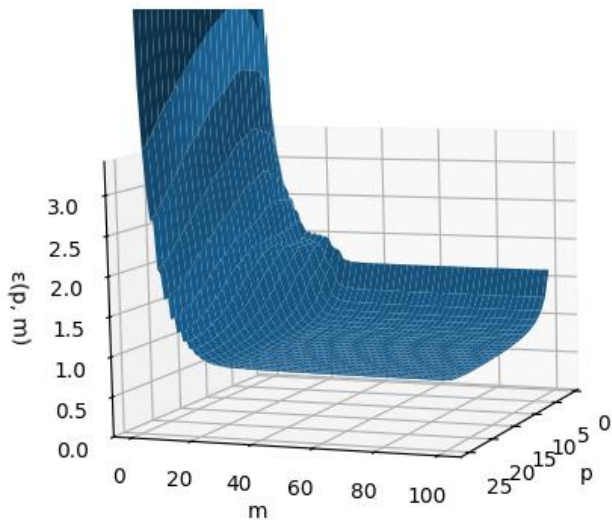


Рис. 3. Значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon = \varepsilon(p, m)$ при наближенні функції $f(x)$ інтерполяційними аналогами Валле-Пуссена (7) залежно від значення параметра p та кількості вузлів інтерполяції m у випадку $n = 25$

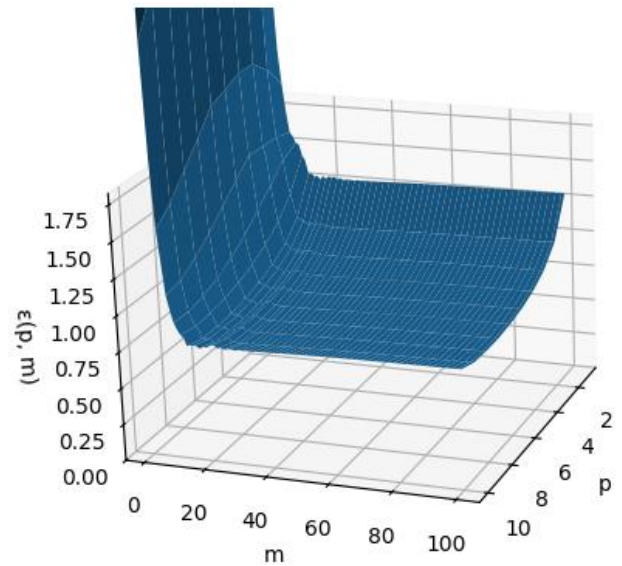


Рис. 4. Значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon = \varepsilon(p, m)$ при наближенні функції $f(x)$ інтерполяційними аналогами Валле-Пуссена (7) залежно від значення параметра p та кількості вузлів інтерполяції m у випадку $n = 10$

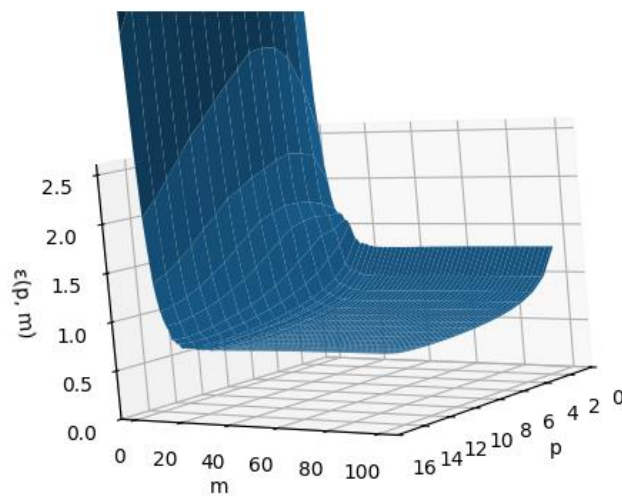


Рис. 5. Значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon = \varepsilon(p, m)$ при наближенні функції $f(x)$ інтерполяційними аналогами Валле-Пуссена (7) залежно від значення параметра p та кількості вузлів інтерполяції m у випадку $n = 7$

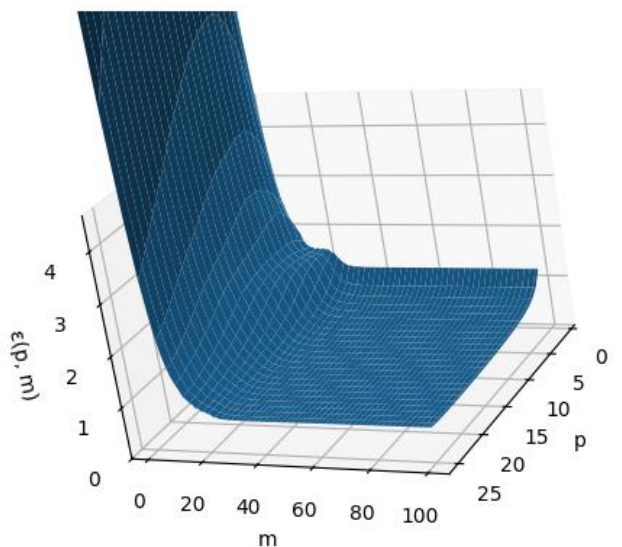


Рис. 6. Значення середньоквадратичного відхилення $\varepsilon = \varepsilon(p, m)$ при наближенні функції $f(x)$ інтерполяційними аналогами Валле-Пуссена (7) залежно від значення параметра p та кількості вузлів інтерполяції m у випадку $n = 25$

кращим в плані точності наближення сигналів частинним випадком інтерполяційних аналогів оператора Валле-Пуссена не лише для наведених вище сигналів, а й для певних класів сигналів загалом. Даний аспект підтверджує те, що в контексті задачі наближення одновимірних сигналів узагальнення операторів Фейєра до операторів типу оператора Валле-Пуссена є невиправданим.

Висновки. В роботі розглянуто інтерполяційні аналоги операторів Валле-Пуссена як узагальнення інтерполяційних аналогів операторів Фейєра в контексті задачі наближення функцій однієї дійсної змінної на проміжку $[0; T]$. Показано, який вигляд дані інтерполяційні аналоги мають та як буде залежати середньоквадратичне відхилення їх від функції, наближення якої

Результати описаного вище імітаційного моделювання

Значення параметра α	Значення параметра n	Значення параметра p	Кількість відліків сигналу m	Оцінка середнього величини (8) при заданих параметрах
1	2	3	4	5
$\frac{1}{3}$	10	1	10	5,597207
			25	4,358018
			50	4,227798
		5	10	4,773897
			25	3,066071
			50	2,848266
		10	10	4,075905
			25	2,988922
			50	2,830993
	50	1	10	10,29902
			25	5,944259
			50	4,724175
		25	10	16,89813
			25	6,388174
			50	2,500465
		50	10	9,777578
			25	3,812082
			50	2,337724
	100	1	10	16,30572
			25	7,966452
			50	5,643732
		50	10	32,93665
			25	11,57191
			50	5,847203
100		10	17,71308	
		25	6,340071	
		50	3,262619	
$\frac{2}{3}$	10	1	10	0,119018
			25	0,09306
			50	0,090291
		5	10	0,100647
			25	0,065248
			50	0,060707
		10	10	0,086325
			25	0,063476
			50	0,060124
	50	1	10	0,213708
			25	0,125814
			50	0,100578
		25	10	0,344858
			25	0,133746
			50	0,052875
		50	10	0,2011
			25	0,080075
			50	0,049625

1	2	3	4	5	
$\frac{2}{3}$	100	1	10	0,335083	
			25	0,16799	
			50	0,119974	
		50	100	10	0,668629
				25	0,241584
				50	0,123453
		100	100	10	0,361209
				25	0,132595
				50	0,069002
1	10	1	10	0,002652	
			25	0,00208	
			50	0,002019	
		5	10	10	0,002226
				25	0,001454
				50	0,001354
		10	10	10	0,001907
				25	0,001413
				50	0,00134
	50	1	10	0,004792	
			25	0,002819	
			50	0,002252	
		25	10	10	0,007741
				25	0,002997
				50	0,001179
		50	10	10	0,004496
				25	0,001788
				50	0,001106
	100	1	10	0,00753	
			25	0,003764	
			50	0,002687	
		50	10	10	0,01505
				25	0,005414
				50	0,002766
100		10	10	0,008111	
			25	0,002967	
			50	0,001542	

будується. Дослідження показує, що перехід до такого роду узагальнень операторів Фейера може бути невиправданим із-за можливого росту похибки наближення незалежно від кількості вузлів інтерполяції. Це явно вказує на те, що оператори Фейера (2) та їх інтерполяційні аналоги забезпечують відносно високу точність наближення функцій на скінченному проміжку в порівнянні з рядом інших, аналогічних мето-

дів наближення. Звідси впливає значущість результатів, отриманих для операторів (2) та їх інтерполяційних аналогів, а також й необхідність в розробці нових методів наближення функцій, основаних на підсумовуванні рядів Фур'є [2, 8]. Результати цієї розробки можуть мати практичну цінність в обробці сигналів [1, 2, 5, 9], економіці [3, 4, 7] та багатьох інших прикладних сферах.

Список літератури:

1. Барабаш О.В., Макарчук А.В., Білявський Б.А., Ткачов В.В. Метод наближення цифрових сигналів інтерполяційними аналогами операторів для дослідження випромінювання радіолокаційних станцій радіотехнічними засобами розвідки. *Повітряна міць України*, 2025. Том 1. № 8. С. 100–104. <https://doi.org/10.33099/2786-7714-2025-1-8-100-104>

2. Hamming R. W. Digital filters. New Jersey : Prentice-Hall, International, 1977. 224 p.
3. Макаrchук А.В., Лега О.В. Перспективи використання інтерполяційних методів для аналізу та планування діяльності підприємств. Трансформація обліку та бізнес-консалтингу в умовах невизначеності: сучасні тренди, виклики, міжнародний досвід [Електронний ресурс] : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф., 14 листопада 2025 р., м. Харків, Держ. біотехнологічний ун-т. Харків, 2025. С. 384 – 387.
4. Muhammad Rahman Ali, Wijaya R., Yunanto P. E. Public Perception of Buying and Selling Bitcoin Using Lexicon Sentiment Analysis. *Indonesian Journal on Computing (Indo-JC)*, 2024, vol. 9, issue 2, pp. 185–198. <https://doi.org/10.34818/INDOJC.2024.9.2.980>
5. Копійка О.В., Барабаш О.В., Коваль О.В., Макаrchук А.В. Метод оцінки локальних екстремумів цифрових сигналів, на основі інтерполяційних аналогів оператора Фейєра. *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. 2025. № 2. С. 232–239. <https://doi.org/10.31891/2219-9365-2025-82-32>
6. Барабаш О., Копійка О., Макаrchук А. Динаміка зміни ймовірності зв'язності розподіленої інформаційної системи в часі з урахуванням випадкового впливу на елементи. *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. 2025. № 1. С. 79–85. <https://doi.org/10.31891/2219-9365-2025-81-10>
7. Сілін Є. Інтерференція в просторах при наближенні сумовних функцій операторами Валле-Пуассена. *Молодий вчений*, 2018. № 10 (62). С. 122–125. <https://www.molodyivchenyi.ua/index.php/journal/article/view/3718>
8. Stein E.M., Shakarchi R. Fourier analysis. Princeton: Princeton University Press, 2003. 325 p.
9. Schafer R., Rabiner L. A digital signal processing approach to interpolation. *Proceedings of IEEE*. 1973. Vol. 6, no. 61. P. 692–702.

Barabash O.V., Makarchuk A.V., Kukharuk S.O. APPROXIMATION PROPERTIES OF INTERPOLATORY ANALOGUES OF DE LA VALLÉE POUSSIN OPERATORS AS A METHOD FOR APPROXIMATING ONE-DIMENSIONAL DIGITAL SIGNALS

This paper investigates the approximation properties of interpolatory analogues of de la Vallée Poussin operators as a generalization of interpolatory analogues of Fejér operators in the context of approximating functions of one real variable on a finite interval. A representation of de la Vallée Poussin sums in the form of an integral operator is considered, and on this basis corresponding interpolatory analogues suitable for the approximation of tabulated signals are constructed. Explicit expressions for these operators are derived, and the dependence of the approximation quality on the method parameters is analyzed, in particular on the value of the generalization parameter and the number of interpolation nodes. To assess the effectiveness of the proposed approach, numerical experiments are conducted on specific test functions, and simulation modeling is performed for classes of signals with prescribed smoothness properties. The mean square error between the original function and its approximation is used as a measure of approximation quality. The obtained results indicate that the minimum error is achieved when the interpolatory analogues of de la Vallée Poussin operators reduce to interpolatory analogues of Fejér operators, which constitute a particular case of the former. It is shown that the generalization of interpolatory analogues of Fejér operators to operators of the de la Vallée Poussin type is not always justified from the standpoint of practical approximation problems, since it may lead to a deterioration in accuracy regardless of the number of interpolation nodes. The results obtained confirm the high efficiency of interpolatory analogues of Fejér operators and point to the relevance of further research into approximation methods based on the summation of Fourier series for applied problems in signal processing, economics, and related fields.

Keywords: digital signal processing, approximation, de la Vallée Poussin operators, Fejér operators, Fourier analysis, interpolation, approximation properties.

Дата першого надходження статті до видання: 27.01.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 24.02.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 08.04.2026